

MAREK SZYDŁOWSKI, PAWEŁ TAMBOR

## **Wczesny wszechświat świadectwem chaotycznego zachowania? Filozoficzne implikacje chaosu deterministycznego w modelach kosmologicznych**

**ABSTRACT.** Early Universe as the Witness of Chaotic Behavior? Philosophical Implications of Deterministic Chaos in Cosmological Models

In the paper we show the relevance of the chaos theory as an effective conceptual tool in modern cosmology. We examine cosmological models of mixmaster's type and we show that chaotic behavior occurring in those models during the reconstruction of an early phase of the Universe evolution reveals the implication on the effect of unpredictability. That feature of unpredictability and even insolvability concerns certain aspects of the dynamics in the systems with respect of their long term behavior (like the Universe). We show that kind of motion described in a mathematical language of dynamical systems can be equivalent to a Turing machine.

**KEY WORDS:** chaos theory, cosmological models, dynamical systems, philosophy and methodology of modern cosmology

### **1. Wstęp**

Odkrycie chaosu deterministycznego odbiło się szerokim echem w nauce i filozofii [Stauffer, Stanley, 2000; Tempczyk, 1998; 2002]. Wcześniej zjawiska chaotyczne były znane w fizyce statystycznej i modelowane, jak na przykład ruchy Browna, przez procesy stochastyczne. Również astronomowie znali złożone chaotyczne zachowania trajektorii planet w badaniu tak zwanego ograniczonego zagadnienia trzech ciał oddziałujących grawitacyjnie (małe ciało w polu grawitacyjnym dwóch ciał). Różnica

między złożonością dynamiczną układów badanych przez fizykę statystyczną a układami mechaniki nieba polegała na tym, że w tych pierwszych złożoność dynamiki jest konsekwencją złożonej natury samego układu (duża liczba molekuł, duża liczba ciał itd.), natomiast w tym drugim układ jest z natury prosty w tym sensie, że liczba oddziałujących mas jest niewielka, a dynamika jest opisywana przez niskowymiarowy układ dynamiczny. Powiedzielibyśmy zatem: „proste jest złożone”, co jest metaforą stwierdzenia faktu, że już proste układy fizyczne, mające kilka stopni swobody, mogą się charakteryzować złożonością dynamiczną.

W kontekście odkrycia deterministycznych układów dynamicznych wykazujących złożone zachowanie chaotyczne rodzi się naturalne pytanie: czy w takim razie nie otwiera się możliwość modelowania złożonej rzeczywistości za pomocą prostych deterministycznych układów? Takie zjawiska jak turbulencja, zmienność kursów akcji na giełdzie, zmienność zjawisk pogodowych etc. można by opisywać za pomocą prostych deterministycznych reguł w ramach jednolitego schematu pojęć i twierdzeń. Warto postawić w tym kontekście pytania: Czy odkrycie zjawiska chaosu deterministycznego przyniosło rewolucję w metodologii modelowania? Czy u podstaw złożonej rzeczywistości, jaką obserwujemy, kryje się prostota, czy też jest to jedynie nasz sposób opisu rzeczywistości, jej modelowania za pomocą prostych modeli, które właśnie odkryliśmy? Naszym celem nie jest dyskusowanie tych kwestii, ale zwrócenie uwagi na fakt, że układy pochodzenia relatywistycznego, opisywane przez Ogólną Teorię Względności (w skrócie OTW), są chaotyczne w innym sensie niż układy mechaniki klasycznej, których dynamika jest opisywana przez teorię Newtona. Obie te teorie opierają się na innych grupach symetrii formułowanych w ich ramach praw. Różnica wynika z odmiennej roli, jaką odgrywiają czas i przestrzeń w obu tych teoriach. W teorii Newtona czas jest absolutny, a prawa fizyki są niezmiennicze względem grupy Galileusza, natomiast w OTW prawa są niezależne od wyboru układu współrzędnych, a czas i przestrzeń tworzą obiektywny byt o strukturze czasoprzestrzeni.

W kontekście kosmologii relatywistycznej, która opiera się na OTW, jest szczególnie interesujące, że ewolucja wszechświata w otoczeniu tak zwanej osobliwości kosmologicznej ma prosty model, w którym pojawia się

złożone chaotyczne zachowanie o własności chaosu deterministycznego. Jednak to zachowanie jest chaotyczne w pewnym węższym sensie niż w przypadku układów klasycznych, których definicję podał Wiggins. Nic w tym dziwnego ponieważ koncepcja chaosu wyrosła na gruncie układów mechaniki klasycznej, a kontekst układów relatywistycznych wzbogaca to zjawisko o pewne nowe aspekty.

Przejdźmy teraz do krótkiego opisu zjawiska chaosu. Językiem matematycznym, odpowiednim do jego opisu, jest geometryczny język przestrzeni fazowej. Jest to przestrzeń, której elementami są stany układu w ustalonej chwili czasu. Mogą one być reprezentowane przez wektor stanu układu  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$  o  $n$  składowych numerowanych indeksami dolnymi. W przestrzeni fazowej ewolucja układu (zbiór jego stanów w kolejnych chwilach czasu  $t$ ) jest reprezentowana przez krzywą o równaniu parametrycznym:

$$\mathbf{x}(t, x_0) = \Phi_t(x_0), \quad (1)$$

gdzie  $x_0$  jest stanem początkowym, a  $\Phi_t$  jest odwzorowaniem, które przy ustalonym  $x_0$  przyporządkowuje jednoznacznie w chwili  $t$  punkt w przestrzeni fazowej. Odwzorowanie  $\Phi_t(x_0)$  jest nazywane strumieniem. Strumień (zwany też potokiem), gdy  $\Phi_t$  jest różniczkowalne, jest ogólnym modelem procesu deterministycznego [Arnold, 1975, s. 56].

Przez układ dynamiczny rozumiemy układ równań różniczkowych o postaci:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) \quad (2)$$

gdzie  $f$  jest funkcją różniczkowalną (gładką),  $x$  jest wektorem (nie będziemy już zapisywać  $x$  czcionką pogrubioną, przyjmując, że jest to wektor o  $n$  składowych), a kropka oznacza różniczkowanie po czasie  $t$ . Układ (2) zawiera informację, że prędkość przemieszczania się punktów wzdłuż krzywej fazowej  $x(t, x_0)$  jest pewną funkcją  $f$  stanu układu w chwili  $t$ .

Z teorii równań różniczkowych wynika, że założenie gładkości funkcji  $f$  gwarantuje, że rozwiązanie równania różniczkowego o postaci  $x(t, x_0)$  po pierwsze istnieje, a po drugie – jest jednoznacznie określone przez waru-

nek początkowy  $x_0$ . Konsekwencją tego jest, że przez każdy punkt przestrzeni fazowej przechodzi pewna ściśle określona krzywa fazowa, zaś krzywe fazowe nigdy nie mogą się przeciąć. Zauważmy, że rozwiązanie układu dynamicznego  $(x(t, x_0))$  jest funkcją dwóch zmiennych: czasu oraz warunku początkowego  $x_0$ .

W różnych obszarach zastosowań funkcja  $f(x)$  będzie określona przez konkretne zastosowanie, natomiast teoria układów dynamicznych abstrahuje od tego, jaką konkretną formę funkcja  $f(x)$  przyjmuje. To powoduje, że język układów dynamicznych staje się uniwersalnym językiem opisu dynamiki dowolnego układu z dziedziny, która nas interesuje. Stan układu  $x$  może opisywać stężenia substancji biorących udział w reakcji chemicznej, populacje gatunków w ekologii, ale także wielkości charakteryzujące ewolucję Wszechświata.

Podstawowym zadaniem tej teorii jest badanie struktury przestrzeni fazowej. Tę strukturę budują rozwiązania reprezentowane jako obiekty geometryczne. Obok wspomnianych rozwiązań reprezentowanych przez krzywe fazowe, istnieją w niej rozwiązania osobliwe, które otrzymujemy przez przyrównanie wszystkich prawych stron układu do zera, tj.:

$$\forall_i f^i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (3)$$

gdzie  $\frac{dx^i}{dt} = f^i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Rozwiązania te są reprezentowane w przestrzeni fazowej przez tak zwane punkty krytyczne. Są one stanami asymptotycznymi układu. Mogą one być punktowe, mogą być także krzywymi zamkniętymi lub zbiorami krytycznymi. Z punktu widzenia teorii układów dynamicznych interesujemy się strukturą przestrzeni fazowej, którą organizują krzywe fazowe, punkty krytyczne reprezentujące stany asymptotyczne układu. Ważne jest, że dla scharakteryzowania tej struktury nie musimy explicite znać postaci jawnych rozwiązań.

W przestrzeni fazowej, gdy  $f(x)$  jest nieliniową funkcją i  $n \geq 3$ , mogą pojawić się: złożone chaotyczne zachowanie trajektorii, struktury fraktalne, nieskończona liczba niestabilnych orbit okresowych – ogólnie złożoność dynamiczna.

Podajmy teraz precyzyjną definicję zjawiska chaosu deterministycznego w sensie Wigginsa [2013], na którą składają się dwa elementy: własność nadwrażliwej czułości stanu układu ze względu na małe zmiany warunków początkowych oraz własność topologicznej przechodności gwarantująca, że trajektorie posiadają własność rekurencji.

**DEF.** Czułość rozwiązań ze względu na małe zmiany warunków początkowych (*sensitive dependence on initial conditions*, SDIC w skrócie) [Wiggins, 2013, s. 608].

Niech  $A$  będzie zwartym inwariantnym zbiorem potoków  $\varphi_t$  na  $\mathbf{R}^n$ . Potok  $\varphi_t$  posiada własność nadwrażliwej zależności (czułości) od warunków początkowych (SDIC) na  $A$ , jeśli istnieje takie  $\delta > 0$ , że dla wszystkich  $x \in A$  i dla wszystkich  $\epsilon > 0$  istnieje takie  $y \in A$  i  $t > 0$ , że  $\|x - y\| < \epsilon$  i  $\|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)\| > \delta$ .

**DEF.** Topologiczna przechodność.

Potok  $\delta_t$  na  $\mathbf{R}^n$  jest topologicznie przechodni na zwartym, inwariantnym zbiorze  $A$ , jeśli dla każdego zbioru otwartego  $U, V \in A$  istnieje takie  $t > 0$ , że  $\varphi_t(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Uwaga.** Jeśli  $A$  zawiera orbity, które są gęste w  $A$  (tj. domknięcie orbit jest równe  $A$ ), wówczas potok jest topologicznie przechodni na  $A$ .

**DEF.** Chaos deterministyczny.

Potok  $\varphi_t$  jest chaotyczny na zwartym, inwariantnym zbiorze  $A$ , jeśli (i)  $\varphi_t$  posiada własność SDIC; (ii)  $\varphi_t$  jest topologicznie przechodni na  $A$ .

Zilustrujmy własność czułości nieliniowego układu dynamicznego ze względu na zmiany warunków początkowych na prostym przykładzie układu dynamicznego dyskretnego. Zakładamy, że stan układu w  $n$ -tym kroku jest opisywany przez liczbę z przedziału otwartego  $(0,1)$  poprzez pewną regułę mającą charakter ściśle deterministyczny

$$f: x_n \rightarrow x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}$$

i w ten sposób ze stanu początkowego  $x_0 \in (0,1)$  poprzez kolejne jego iteracje przy pomocy  $f$  definiujemy kolejne stany układu:  $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots$

Założmy, że  $x_0$  zapiszemy w systemie dwójkowym, tj.  $x_0 = 0, x_1x_2x_3, \dots$ , gdzie kolejne cyfry rozwinięcia dwójkowego bierzemy jako 0 lub 1, tj.  $x_i \in \{0,1\}$ . Zdefiniowana reguła otrzymywania kolejnych stanów z poprzednich może być przetłumaczona na prosty przepis: weź liczbę  $x_0$  i pomnóż ją przez 2; następnie odrzuć jej pierwszy wyraz rozwinięcia (mod (1) oznacza odrzucenie liczby całkowitej 1). W wyniku zastosowania reguły jedna iteracja oznacza utratę 1 bitu informacji, natomiast po  $N$  iteracjach zostaje utracone już  $N$  bitów informacji. Założmy teraz, że liczbę  $x_0$  znamy z dokładnością do  $N$  miejsc, wtedy po  $N$  iteracjach nie będziemy posiadać żadnej informacji na naszej liczbie, np. czy należy ona do przedziału  $(0, 1/2)$  czy przedziału  $(1/2, 1)$ . To, do którego z przedziałów wpadną kolejne iteracje  $x_0$ , asymptotycznie jest zjawiskiem losowym, analogicznym do zjawiska rzutu monetą.

Wykazanie, że dynamika układu jest chaotyczna w sensie Wigginsa, jest niezwykle trudne (udaje się to zrobić zaledwie dla kilku układów, a czasami dowód, jak w układzie Roslera, jest wspomagany numerycznie), dlatego też często korzysta się w tym celu z metod numerycznych, licząc tzw. wykładnik Lapunowa, entropię informacyjną etc. [Shuster, 2005].

Szczególnie popularne jest wyznaczanie wartości wykładnika Lapunowa, który mierzy uśrednione tempo rozbiegania się bliskich trajektorii układu dla bliskich trajektorii i jest definiowany następująco:

$$\lambda_{Lap} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lim_{x(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(\|x(t)\|)}{\|x(0)\|}, \quad (5)$$

gdzie  $\|x(t)\|$  jest długością wektora separacji łączącego punkty na bliskich trajektoriach, którym odpowiada ta sama wartość parametru  $t$  odmierzanego wzdłuż trajektorii,  $\|x(0)\|$  jest początkowym wektorem separacji, o którym zakładamy, że jego długość dąży do zera.

Dla układów liniowych wykładniki Lapunowa są po prostu częściami rzeczywistymi macierzy linearyzacji układu. Stąd ich wartość dodatnia będzie oznaczać niestabilność układu. Wykładniki Lapunowa są wewnętrzną własnością całego układu. Twierdzenia Oseledeca dają ściśle matematyczne podstawy teoretyczne dla obliczenia tej wielkości dla ukła-

dów nieliniowych. Gdy granica (5) istnieje i jest dodatnia, wówczas uśrednione tempo rozbiegania się bliskich trajektorii jest proporcjonalne do czyli odwrotność wykładnika Lapunowa ma wymiar czasu i może być interpretowana jako pewien czas charakterystyczny, po którym początkowa nieoznaczoność warunków początkowych wzrośnie  $e$ -krotnie. Ponieważ dla układów fizycznych warunków początkowych nigdy nie znamy z nieskończoną dokładnością, błąd, który popełniamy w jego wyznaczeniu, będzie się propagował bardzo szybko (eksponencjalnie), co oznacza, że asymptotycznie dla  $t \rightarrow \infty$  trajektorie będą zachowywać się w sposób losowy.

## 2. Chaos deterministyczny w modelach kosmologicznych

Relatywistyczne modele wszechświata są konstruowane z pierwszych zasad na bazie Ogólnej Teorii Względności. Równania pola są skomplikowanym układem równań różniczkowych cząstkowych oraz nieliniowych, dla których znamy pewne rozwiązania dla szczególnych przypadków, przy założonych symetriach czasoprzestrzeni. W zastosowaniach kosmologicznych istnieje jednak ważna podklasa czasoprzestrzeni, których ewolucja w uniwersalnym czasie kosmologicznym sprowadza się do przypadku układu dynamicznego. Gdy założymy, że przestrzeń jest jednorodna lub jednorodna i izotropowa, to ewolucja takiego wszechświata daje się zredukować do układu o postaci (2), dla którego w różny sposób możemy dokonać wyboru parametryzacji zmiennych stanu układu ( $x(t)$ ).

Dalej skupimy uwagę na podklasie modeli jednorodnych BIX i BVIII (inaczej modeli Bianchi), które są uogólnieniem modeli odpowiednio zamkniętych i otwartych. Modele te, zwane modelami Mixmaster, zostały zaproponowane w kontekście rozwiązania problemu jednorodności i izotropii wszechświata. Dzisiejszy wszechświat w wysokim stopniu jest jednorodny i izotropowy (a więc jest opisywany bardzo szczególnym modelem, który, w klasie modeli jednorodnych, tworzy zbiór miary zero); chociaż w początkowej fazie ewolucji był on silnie niejednorodny i izotropowy, w epoce rekombinacji (dla  $z_r \cong 1000$ ) rozmiar horyzontu był  $26 \cdot 10^9$

lat świetlnych, co implikuje, że dzisiaj dwa punkty na sferze niebieskiej odległe o więcej niż  $2^\circ$  łuku nie powinny nic „o sobie wiedzieć”;  $\theta = (1 + z_r) \frac{t_r}{t}$ , czas rekombinacji  $t_r = 10^{12} - 10^{13} s$ . Tymczasem wszechświat widziany w danym kierunku oraz antypodalnie posiada identyczne własności.

Charles Misner zaproponował modele Mixmaster jako rozwiązanie zagadki jednorodności i izotropii wszechświata [Szydłowski, 1997, s. 49–73]. Postawił hipotezę, że w trakcie kosmicznej ewolucji w wyniku procesów dyssypacji (na przykład kwantowego procesu kreacji par elektron-pozyton) następowało tłumienie anizotropii i informacja mogła być wielokrotnie wymieniana pomiędzy punktami przestrzeni, co w konsekwencji doprowadziło do obserwowanej dzisiaj zaniedbywalnej anizotropii, która w przeliczeniu na anizotropię temperatury promieniowania relikтового T wynosi  $\frac{\Delta T}{T} \cong 10^{-5}$ .

Najprostszym jednorodnym modelem kosmologicznym jest model płaski. Metryka czasoprzestrzeni takiego modelu jest uogólnieniem modelu płaskiego, którego ewolucja jest opisywana przez jedną funkcję czasu  $a(t)$ . Model ten jest nazywany modelem Bianchi I; przestrzeń jest ortogonalna do osi czasu, tj. czasoprzestrzeń jest produktem kartezjańskim  $R \times R^3$ , gdzie  $R^3$  jest 3-przestrzenią euklidesową  $(x, y, z)$ . W trzech kierunkach głównych  $x, y, z$  ewolucja czasoprzestrzeni jest różna i jest opisywana przez trzy czynniki skali  $a(t)$ ,  $b(t)$  i  $c(t)$ . Metryka przestrzeni jest niezmiennicza względem translacji, tj. grupy przekształceń  $x \rightarrow x + \alpha, y \rightarrow y + \beta, z \rightarrow z + \gamma$ , gdzie  $\alpha, \beta, \gamma = \text{const}$ . Jednym z pierwszych rozwiązań równań Einsteina było rozwiązanie Kasnera dla przypadku próżniowego (pusty Wszechświat bez źródła pola grawitacyjnego). To rozwiązanie jest niezwykle proste i ma postać:

$$a(t) = a_0 t^{2p_1}, b(t) = b_0 t^{2p_2}, c(t) = c_0 t^{2p_3}, \quad (6)$$

gdzie  $a_0, b_0, c_0$  są stałymi tak jak  $p_1, p_2, p_3$  zwane wykładnikami kasnerowskimi, które nie są niezależne i spełniają dwa więzy:



$$\sum_{i=1}^3 p_i = \sum_{i=1}^3 p_i^2 = 1 \quad (7)$$

Modele Bianchi (IX) i Bianchi (VIII) są również modelami jednorodnymi, ale o zakrzywionej przestrzeni. W otoczeniu osobliwości początkowej oba te modele są nieodróżnialne, natomiast odróżnia je długoterminowe zachowanie, dlatego ich własności, gdy analizujemy zachowanie czynników skali  $a(t)$ ,  $b(t)$  i  $c(t)$ , są identyczne, gdy objętość przestrzeni  $\propto \sqrt{a^2 b^2 c^2}$  zmierza do zera.

Ponieważ trzy wykładniki kasnerowskie spełniają dwa warunki więzów, wygodnie będzie je sparametryzować pojedynczym parametrem  $u$  w następujący sposób:

$$p_1 = \frac{-u}{1+u+u^2}, p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2}, p_3 = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2} \quad (8)$$

gdzie zastosowano uporządkowanie wykładników  $p_1 < p_2 < p_3$ . Gdy parametr  $u \geq 1$ , wówczas  $-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0$ ,  $0 \leq p_2 \leq \frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{3} \leq p_3 \leq 1$ .

Z kolei, gdy  $u < 1$ , otrzymujemy te same wartości wykładników kasnerowskich, ponieważ:

$$p_1\left(\frac{1}{u}\right) = p_1(u), p_2\left(\frac{1}{u}\right) = p_2(u), p_3\left(\frac{1}{u}\right) = p_3(u) \quad (10)$$

Oczywiście w przypadku modeli Mixmaster rozwiązania kasnerowskie nie będą ścisłymi rozwiązaniami, ale okazuje się, że ich złożona dynamika może być doskonale przybliżona przez serię epok kasnerowskich parametryzowanych przez parametr  $u$ . Odkrycia tego dokonali Belinski, Khalatnikov oraz Lifshitz [1970, s. 525]. Możliwe jest zbudowanie teorii perturbacyjnej, w której jawne rozwiązania Kasnera odgrywać będą rolę aproksymacji zerowego rzędu, a zaburzeniami będą człony przestrzennej krzywizny.

W ten sposób został uzyskany efektywny opis ewolucji czasoprzestrzeni w pobliżu osobliwości początkowej  $t \rightarrow 0$  w terminach serii epok

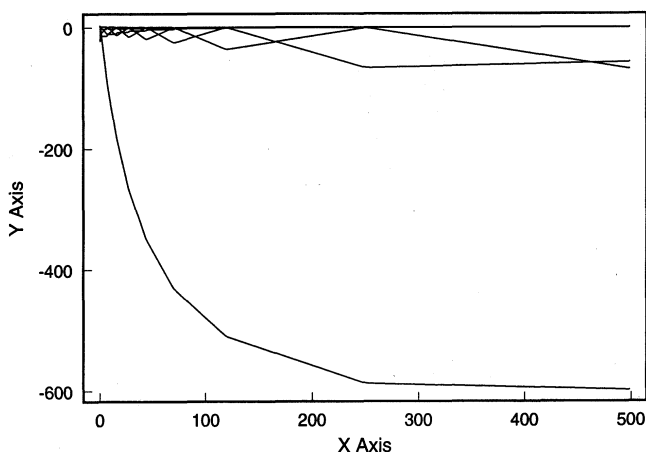
kasnerowskich, gdzie przejście od jednej do kolejnej następuje poprzez wymianę wykładników Kasnera  $p_i(u)$ . Ten opis jest uniwersalnym opisem zachowania czasoprzestrzeni niejednorodnej i anizotropowej, gdy dodamy rotację osi głównych w kierunkach ortogonalnych:  $\vec{l}$ ,  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ . Trzy trójwymiarowe wektory, różne od wektorów kierunkowych osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , definiują kierunki, wzdłuż których przestrzenne odległości zmieniają się potęgowo w czasie  $t$ :  $a = t^{p_l}$ ,  $b = t^{p_m}$ ,  $c = t^{p_n}$ . Niech dalej  $p_l = p_1$ ,  $p_m = p_2$ ,  $p_n = p_3$ , tj.  $at^{p_1}$ ,  $bt^{p_2}$ ,  $ct^{p_3}$ , czyli wszechświat kurczy się w kierunku wektora  $\vec{m}$  oraz  $\vec{n}$  natomiast ekspanduje wzdłuż kierunku  $\vec{l}$ .

Perturbacje krzywiznowe sprawiają, że zmienne  $a$ ,  $b$ ,  $c$  przechodzą do nowej epoki kasnerowskiej:  $a \propto t^{p_1}$ ,  $b \propto t^{p_2}$ ,  $c \propto t^{p_3}$ , w której wykładniki Kasnera są wymieniane według reguł:

$$p'_l = \frac{|p_1|}{1-2|p_1|}, p'_m = \frac{-2|p_1|-p_2}{1-2|p_1|}, p'_n = \frac{p_3-2|p_1|}{1-2|p_1|}. \quad (9)$$

Stąd efekt zaburzenia spowodował zastąpienie epoki kasnerowskiej przez inną i ujemny wykładnik  $t$  został przetransponowany z kierunku  $\vec{l}$  na kierunek  $\vec{m}$ . Podczas tego przejścia funkcja  $a(t)$  osiąga maksimum, a  $b(t)$  – w tej samej chwili – minimum, podczas gdy trzeci czynnik skali  $c(t)$  monotonicznie maleje. Tym samym początkowo malejący czynnik skali  $b$  będzie rósł, podczas gdy pozostałe czynniki skali  $a(t)$  i  $c(t)$  maleją. Poprzednio rosnące zaburzenie powoduje przejście od epoki kasnerowskiej opisaną zestawem wykładników Kasnera  $(p_1, p_2, p_3)$  do zestawu  $(p'_1, p'_2, p'_3)$ , zaczyna być tłumione i zanika do zera. Wówczas inne zaburzenie zaczyna rosnąć, powodując zastąpienie jednej epoki kasnerowskiej inną.

Na wykresie pokazano wynik numerycznego całkowania układu Bianchi (IX). Na osiach  $X$  i  $Y$  zaznaczono odpowiednio  $\ln t$ , oraz  $\ln a^2$ ,  $\ln b^2$ ,  $\ln c^2$ . Wynik całkowania pokazuje, że dynamika jest dokładnie poskładana z kawałków linii prostych reprezentujących epoki kasnerowskie. Wykres 1 ilustruje jak precyzyjnie prawdziwa dynamika jest aproksymowana serią epok kasnerowskich.



Ryc. 1. Wynik całkowania numerycznego dynamiki modeli Mixmaster

Na wykresie przedstawiono na osi Y, w skalach logarytmicznych logarytmy naturalne czynników skali:  $2\ln a$ ,  $2\ln b$ ,  $2\ln c$ . Na osi X odmierzany jest  $\log t$ , gdzie  $t$  jest czasem kosmologicznym. Jak można zobaczyć na wykresach ewolucja trzech czynników skali w trzech kierunkach głównych ( $x, y, z$ ) jest reprezentowana przez linie proste (epoki kasnerowskie). Wykres całkowania numerycznego dokładnych równań pokazuje, jak trafnym jest przybliżenie ewolucji Wszechświata w otoczeniu osobliwości początkowej serią epok kasnerowskich.

Reguła odbicia ujemnego wykładnika Kasnera może być wyrażona w języku parametryzacji  $p_i(u)$ . Jeśli  $p_l = p_1(u)$ ,  $p_m = p_2(u)$ ,  $p_n = p_3(u)$ , tj. ujemny wykładnik jest wzdłuż kierunku  $\vec{l}$ , to nastąpi jego odbicie na kierunek  $\vec{m}$  i wtedy:

$$p'_l = p_2(u - 1), p'_m = p_1(u - 1), p'_n = p_3(u - 1).$$

Przerzucanie ujemnego wykładnika kasnerowskiego pomiędzy kierunkami  $\vec{l}$  i  $\vec{m}$  będzie kontynuowane tak długo, dopóki część całkowita  $u$  nie zostanie wyczerpana, tj.  $u$  stanie się mniejsze od jedności. Wówczas  $u < 1$  zostanie przetransformowane do nowej wartości  $u > 1$ . Wtedy jeden z wykładników  $p_l$  albo  $p_m$  przyjmie wartość ujemną i  $p_n$  będzie mniejszy

od dwóch dodatnich wykładników ( $p_n = p_2$ ). Kolejna zmiana wykładników będzie polegać na zmianie między kierunkami  $\vec{n}$  i  $\vec{l}$  albo  $\vec{n}$  i  $\vec{m}$ .

Reasumując, realna dynamika jest kodowana przez parametr  $u$  określający rozwiązanie Kasnera. Jeśli układ startuje z epoki kasnerowskiej charakteryzowanej parametrem początkowym  $u_0$ , następuje po niej seria epok kasnerowskich  $u_0 - 1, u_0 - 2, \dots$ , aż do wyczerpania części całkowitej  $u_0$ , tj. do  $u_{końcowe} = u_0 - [u_0]$ , gdzie [...] jest symbolem części całkowitej danej liczby. Wtedy układ przechodzi do nowej ery, w której następuje wymiana wykładników Kasnera od wartości  $u_0 - [u_0] \rightarrow \frac{1}{u_0 - [u_0]} = u_{począt.}$ , która jest większa od jeden, itd.

Przykładowo, niech  $u_0 = 4,321$ , wówczas dynamika jest kodowana ciągiem: 4,321..., 3,321..., 2,321..., 1,321..., 0,321...,  $1/0,321 = 3,12\dots$ , 2,12..., 1,12..., 0,12...,  $1/0,12$ , itd.

Długości kolejnych er (mierzonych liczbą występujących w niej epok kasnerowskich) są kolejnymi cyframi rozwinięcia  $u_0$  w nieskończony ułamek łańcuchowy:

$$3 + \frac{1}{8+}$$

$$u_0 = 4,321 = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{8+}}$$

### 3. Chaos w układach pochodzenia relatywistycznego

Równoległe do przybliżenia BKL modeli Mixmaster Ch. Misner podał tzw. hamiltonowski opis ich dynamiki. W tym obrazie ewolucja Wszechświata jest naśladowana przez ruch cząstki znajdującej się wewnątrz trójkątno-podobnych ścian, od których się odbija. Odbicia nie przebiegają tak jak odbicia sprężyste w zagadnieniu bilardu, gdzie cząstka swobodna odbija się od ścian, ponieważ ściany dodatkowo oddalają się od siebie.

<sup>1</sup> Na przykład liczba  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , zwana złotym podziałem, ma nieskończone rozwinięcie w ułamek łańcuchowy  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$  ... = [1,1, ...].

O.I. Bogoyavlensky zaproponował nowy formalizm hamiltonowski dla opisu modeli Bianchi i pokazał, że dla tej klasy modeli w przestrzeni fazowej można zdefiniować monotoniczną funkcję:  $F = \frac{d(abc)}{dt} : \frac{dF}{dt} \leq 0$  na mocy równań Einsteina [Bogoyavlensky, 1985]. Z istnienia tej funkcji wynika brak własności topologicznej tranzytywności. Pokazuje to również praca R. Cusmana i J. Śniatyckiego [1995]. Z tego względu układy relatywistyczne (także modele Mixmaster) nie podpadają pod definicję Wigginsa klasycznego chaosu. Dynamika modeli Mixmaster jest bardziej rodzajem procesu chaotycznego rozpraszania, gdy większość ruchu jest całkowalna i tylko krótkie okresy rozpraszania trajektorii czynią dynamikę złożoną.

Zauważmy, że różnego typu popularne narzędzia detekcji chaosu, jak wykładniki Lapunowa, entropia Kołmogorowa-Synaja i inne nie są niezmiennicze względem reparametryzacji czasu. Wykładniki Lapunowa liczone numerycznie w tzw. czasie synchronicznym  $\tau : \frac{dt}{abc} = d\tau$  dążą do zera, jak w przypadku układów całkowalnych. Istnieje problem inwariantnego opisu chaosu, który w układach relatywistycznego pochodzenia przejawia się poprzez istnienie struktur fraktalnych w przestrzeni fazowej – brzegi zbiorów atrakcji dają wskaźniki chaosu niezależne od parametryzacji czasu [Cornish, Lewin, 1996, s. 998].

Złożoność dynamiczna może być również wyrażona za pomocą pojęcia niecałkowalności układu. Można pokazać, że modele Mixmaster są niecałkowalne w sensie nieistnienia mereomorficznych całek pierwszych [Maciejewski, Jean-Marie Strelcyn, Szydłowski, 2001, s. 1728,]. Jest to wniosek o charakterze egzystencjalnym: dynamika jest złożona w tym sensie, że nie istnieje dostateczna liczba całek pierwszych ( $F(x^1, x^2, \dots, x^n) = \text{const}$ ), oczywiście w rozpatrywanej klasie funkcji, które pozwoliłyby na przedstawienie rozwiązania (trajektorii), jako funkcji zadanej za pomocą pewnego wzoru. Jest to informacja niezależna od reparametryzacji czasu, mogąca być wskazówką, że problem wyznaczenia trajektorii ze swej natury może nie być wykonalny.

Układy relatywistyczne, w których występuje chaos, wykazują własność nadwrażliwej czułości na małe zmiany warunków początkowych, ale

przestrzeń fazowa (także konfiguracyjna) na ogół nie jest zwarta albo ograniczona i trajektorie takich układów nigdy nie będą powracać, tj. nie posiadają one własności rekurencji. Dla wystąpienia zjawiska mieszania niezmiennicza miara musi być zwarta, co nie jest spełnione dla układów relatywistycznych. Jeśli rozważamy ruch cząstek w czasoprzestrzeni modeli kosmologicznych, to musimy pamiętać, że ich metryka jest nieokreślona i posiada sygnaturę Lorentza.

Wspomnieliśmy, że Misner zaproponował formalizm hamiltonowski dla opisu dynamiki modeli Mixmaster. Dla układów hamiltonowskich (zachowawczych) zachowujących gładkie miary, gdy przestrzeń fazowa jest zwarta, ta miara jest skończona. W przypadku układów hamiltonowskich jest to miara Lebesgue'a lub Liouville'a na powierzchni stałej energii. Dla układów hamiltonowskich zachowania regularne i chaotyczne koegzystują w przestrzeni fazowej. Zjawisko to było numerycznie odkryte przez M. Henona i O. Heiles'a w 1963 r. w ich pionierskiej pracy i jest wiele przykładów na to, że jest ono typowe dla układów hamiltonowskich, chociaż ścisły dowód tego faktu nie istnieje [Strelcyn, 1991, s. 331–345].

W teorii ergodycznej można znaleźć hierarchię chaosu w układach hamiltonowskich [Berkovitz, R. Frigg, F. Kronz, 2007, s. 661–691].

#### **4. Implikacje chaosu dla nieprzewidywalności**

Chaos deterministyczny jest zjawiskiem odkrytym w układach deterministycznych i układy z chaosem pokazują *explicite*, że te dwa pojęcia: determinizm i chaotyczne zachowanie trajektorii w przestrzeni fazowej (oraz związana z nim nieprzewidywalność) nie pozostają w stosunku do siebie w sprzeczności. Istnieją układy, które są jednocześnie chaotyczne, a których trajektorie w przestrzeni fazowej wykazują złożone zachowanie chaotyczne. Stąd naturalne staje się pytanie: jakie są nowe implikacje chaosu dla nieprzewidywalności? Pytanie to zostało podstawione przez Charlotte Werndl [2009, s. 195–220]. Zaznaczmy, że odpowiedź Werndl odno-

si się do klasycznego chaosu układów mechaniki klasycznej. Stawiamy tezę, że można udzielić analogicznej odpowiedzi w odniesieniu do kosmologii oraz modeli opisujących ewolucję wszechświata w otoczeniu osobliwości początkowej. Ten nowy kontekst implikuje nowe wnioski, które uzupełniają rozważania Werndl.

Do często powtarzanych w książkach popularnych mitów należy stwierdzenie związane z chaosem deterministycznym, że w długookresowym zachowaniu układu (praktycznie po czasie charakterystycznym  $\lambda_{Lap}^{-1}$ ) niemożliwe jest przewidywanie zachowania układu, który traci swoją pamięć o warunkach początkowych i jego zachowanie staje się losowe. Werndl przeprowadza staranną analizę chaosu w języku przedmiotowym teorii układów nieliniowych i odpowiada na ważne pytanie o nowe implikacje chaosu dla nieprzewidywalności wykazując, że:

1) Chaos może być zdefiniowany poprzez pojęcie mieszania trajektorii<sup>2</sup>.

2) Dla predykcji jakiegokolwiek zdarzenia w przyszłości wszystkie przeszłe zdarzenia są w sensie probabilistycznym (z punktu widzenia wartości oczekiwanej) bez znaczenia, a własność mieszania posiada naturalną interpretację jako pewna szczególna forma przybliżonej probabilistycznej nieistotności, która jest formą nieprzewidywalności (przeszłość jest bez znaczenia dla obecnego statusu układu).

Teza Werndl jest więc następująca: nową implikacją chaosu dla nieprzewidywalności jest, że dla predykcji jakiegoś zdarzenia na dowolnym poziomie dokładności wszystkie przeszłe wydarzenia są w przybliżeniu probabilistycznie nieistotne<sup>3</sup>. Uważamy tę tezę za szczególnie interesującą, zważywszy na zamieszanie, jakie istnieje w odniesieniu do implikacji chaosu dla nieprzewidywalności. Autorka w tym kontekście przytacza poglą-

---

<sup>2</sup> Układ posiada własność mieszania, jeśli prawdopodobieństwo znalezienia punktu P na trajektorii w obszarze B po jego wyjściu z obszaru A jest proporcjonalne do iloczynu miar objętości obu tych obszarów:  $m(A)m(B)$ . Zobacz: Arnold, 1975.

<sup>3</sup> Teza w brzmieniu oryginalnym: I proposed a novel answer: a new implication of chaos for unpredictability is that, for predicting any event at any level of precision  $\epsilon > 0$ , all sufficiently past events are approximately probabilistically irrelevant. Chaotic behavior is multi faceted and takes various forms. Yet, if the aim is to identify a general new implication of chaos for unpredictability, I think this is the best we can do. [Werndl, 2009, s. 217].

dy J. Lighthilla oraz P. Weingartner [Lighthill, 1986, s. 35–50], [Weingartner, 1996, s. 47–88].

Zauważamy, że odpowiedź Werndl, jakkolwiek byłaby błyskotliwa, pozostaje nieadekwatna w kontekście układów relatywistycznych (modeli wszechświata), ponieważ układy pochodzenia relatywistycznego nie posiadają własności mieszania z powodu złamania warunku topologicznej przechodniości. To sprawia, że nie będą one posiadać własności mieszania trajektorii w przestrzeni fazowej. Z drugiej strony układy te wykazują złożone zachowanie trajektorii w przestrzeni fazowej, w której pojawiają się struktury fraktalne.

## 5. Nowe implikacje chaosu dla nieprzewidywalności układów relatywistycznych

Modele Mixmaster (B IX i B VIII w klasyfikacji Bianchi) posiadają własności układu złożonego dynamicznie, który w otoczeniu osobliwości początkowej można aproksymować serią epok kasnerowskich poprzez przybliżenie BKL. Wiadomo o tych aproksymacjach, że posiadają one cechy układu chaotycznego w sensie klasycznym. W obu modelach BIX i BVIII, gdy rozważamy ruch układu w otoczeniu osobliwości początkowej  $abc \rightarrow 0$  działa opis BKL i istnieją numeryczne argumenty za tym, że jest to dobre przybliżenie złożonej dokładnej dynamiki tych modeli. Istnieje jednak zasadnicza różnica w długoterminowym zachowaniu modelu BVIII i podawane są argumenty za tym, że chaos znika [Barrow, Gaspar, s. 1809–1822, 2001]. A zatem, chociaż prawa teorii grawitacji są symetryczne względem zwierciadlanego odbicia w czasie zjawiska (w tym przypadku chaos), opisywane przez rozwiązania OTW mogą różnicować przeszłość od przyszłości [Gaspar, 2004, s. 2085–2094]. Długoterminowe zachowanie czynników skali  $a$ ,  $b$ ,  $c$  w modelu B VIII jest chaotyczne, więc te modele odróżniają przyszłość od przeszłości [Gaspar, 2004, s. 2093]. Jest to unikalna cecha układów ogólnie relatywistycznych.



Gaspar i Acquaviva podają heurystyczne argumenty za tym, że tego typu układy jak BVIII posiadają stopień nieprzewidywalności silniejszy, niż ma to miejsce dla układów chaotycznych, a mianowicie złożona dynamika takich kosmologicznych modeli jest *nierozstrzygalna*. Układy te jakościowo są porównywalne do maszyny Turinga w tym sensie, że, nawet gdy warunki początkowe dla trajektorii będą dokładnie znane, ewolucja układu będzie nierozstrzygalna w sensie Gödla [Gaspar, Acquaviva, 2012, s. 65]. Fizycy znają tego typu układy z taką złożonością. C. Moore pokazuje, że ruch cząstki w trójwymiarowej barierze potencjału jest równoważny maszynie Turinga (*and so can be capable of universal computation*) [Moore, 1990, s. 2354–2357]. Układ ten posiada silniejszy typ nieprzewidywalności niż ma to miejsce dla prostych (niskowymiarowych) układów chaotycznych. W tym układzie „nowy” stopień jego dynamicznej złożoności jest powiązany z nierozstrzygalnością pewnych własności układu.

Gaspar i Acquaviva podają argumenty za tym, że złożoność dynamiczna układów mechaniki klasycznej i einsteinowskiej teorii grawitacji są różnego typu. Nowy typ złożoności dynamicznej związany z nierozstrzygalnością w modelu BVIII jest powiązany z czasową asymetrią rozwiązań BVIII. Gaspar uznaje, że o ile newtonowska grawitacja nigdy nie prowadzi do nierozstrzygalności dotyczącej własności dynamiki; ma to miejsce dla B VIII, gdzie parametr krzywizny Weyla i inne skalary stają się nieograniczone dla długoterminowego zachowania układu [Gaspar, Acquaviva, 2012, s. 65].

## 6. Wnioski

W pracy dokonaliśmy analizy zjawiska chaosu deterministycznego układów pochodzenia relatywistycznego w celu zbadania, jakie są implikacje chaosu dla nieprzewidywalności układu. Zagadnienie, jakim są implikacje chaosu występującego w klasycznych układach, było już wcześniej podjęte przez Werndl na łamach *British Journal for the Philosophy of Science*. Jej analiza jest niezwykle użyteczna, ponieważ wokół zjawiska

chaosu i jego implikacji dla nieprzewidywalności układu narosło wiele mitów, które zresztą w pracy zostały przytoczone.

Werndl, po pierwsze, zdefiniowała precyzyjnie chaos w terminach własności mieszania trajektorii w przestrzeni fazowej (własność *mixing*), a po drugie, na tej podstawie udzieliła odpowiedzi na pytanie, jakie są nowe implikacje chaosu dla nieprzewidywalności układów deterministycznych. Propozycja Werndl nie odnosi się jednak do układów relatywistycznych, gdyż ich dynamiką rządzą einsteinowskie równania pola grawitacyjnego. Takim układem jest wszechświat, którego struktura wielkoskalowa jest zdominowana przez oddziaływanie grawitacyjne.

Własności obserwowanego wszechświata rozpoznajemy, konstruując ich modele. Jednorodne i izotropowe modele Mixmaster sklasyfikowane przez Bianchiego jako BIX i BVIII dobrze opisują ewolucję wszechświata w otoczeniu osobliwości początkowej, a także zachowanie w otoczeniu realistycznych osobliwości wewnątrz czarnych dziur, kolaps grawitacyjny etc. Dla tych układów znaleziono przybliżony opis dynamiki w pobliżu osobliwości za pomocą tak zwanych epok kasnerowskich [Landau, Lifszyc, 1971, s. 435]. Dynamika wszechświata, aproksymowana przez serię epok kasnerowskich, posiada własności układu chaotycznego w dobrze określonym sensie. Jednakże, chociaż przybliżenie BKL posiada cechy układu chaotycznego, trzeba pamiętać, że znane są układy, których przybliżenie posiada cechy układu chaotycznego, natomiast układ dokładny jest regularny i całkowalny.

Gdy badamy dokładną dynamikę modeli Mixmaster, to okazuje się, że te układy nie posiadają cechy topologicznej przechodniości, która gwarantuje rekurencję trajektorii, będącej powodem wystąpienia mieszania. Układy relatywistyczne należą do układów, w których ma miejsce rozpraszanie chaotyczne, pojawiają się struktury fraktalne, natomiast nie występuje mieszanie trajektorii. Własność topologicznej tranzytywności jest jednym z warunków, które pojawiają się w definicji Wigginsa przytoczonej w pracy.

W pracy zwróciliśmy uwagę na model BVIII, dla którego istnieją argumenty, że analogicznie do BIX jest chaotyczny w pobliżu osobliwości początkowej i regularny dla późnych czasów. Jest to niezwykle interesują-

cy układ, ponieważ pojawiają się sugestie, że występująca w nim złożoność dynamiczna jest silniejszego typu, niż ma to miejsce dla prostych układów z chaosem. Ten układ jest porównywalny do maszyny Turinga w tym sensie, że nierozstrzygalne pozostają cechy tego układu w przyszłości, nawet gdy warunki początkowe znamy precyzyjnie. Wszechświat może być zatem modelowany przez nieprzewidywalny i nierozstrzygalny układ w aspekcie jego długoterminowego zachowania analogicznie do układu dynamicznego badanego przez Christophera Moore'a.

W układach dynamicznych nieprzewidywalność zachowania układu jest związana z czułością układu nieliniowego ze względu na małe zmiany warunków początkowych. Gdy obszar dopuszczalny dla ruchu trajektorii będzie skończony, to będziemy mieć do czynienia z mieszaniem trajektorii. W przypadku układów klasycznych, poszukując odpowiedzi na pytania, jakie są implikacje zjawiska chaosu dla nieprzewidywalności zachowania układów, Werndl znalazła odpowiedź, definiując chaos w pojęciach własności mieszania trajektorii. Takie ujęcie chaosu jest intuicyjnie zrozumiałe, ponieważ wyobrażamy sobie w przestrzeni fazowej trajektorie, które się rozbiegają, ze względu na własność ich czułości, na małe zmiany warunków początkowych w przestrzeni zwartej albo skończonej. Ponieważ trajektorie w przestrzeni fazowej nigdy nie mogą się przecinać, zaczynają się w niej mieszać, wypełniając ją w gęsty sposób. To jednak nie dotyczy układów relatywistycznych, których trajektorie w przestrzeni fazowej z natury nie wykazują własności mieszania, ponieważ trajektorie nie mają własności powrotu. W szczególności dla takich układów nie da się skonstruować tak zwanych przekrojów Poincarego. W przypadku modelu BVIII może zaistnieć sytuacja, że nawet jeśli znamy warunki początkowe z nieskończoną dokładnością, to pewne aspekty dynamiki nie będą rozstrzygalne.

Naszym zdaniem ścisła odpowiedź na pytanie: „Czy wszechświat opisywany przez układ dynamiczny B VIII posiada cechę układu złożonego dynamicznie o własności nierozstrzygalności długoterminowego zachowania?” jest ściśle związana z naszym zrozumieniem problemu koegzystencji dla układów hamiltonowskich pochodzenia kosmologicznego. Dopiero wówczas, gdy zrozumiemy, w jaki sposób w przestrzeni fazowej zachowa-

nia regularne koegzystują z chaotycznymi (zjawisko dyfuzji Arnolda, polegające na przenikaniu trajektorii przez fraktalny brzeg rozdzielający te układy), będziemy mogli rozstrzygnąć, czy wszechświat jest świadectwem chaosu o własnościach nieprzewidywalności maszyny Turinga.

## Appendix – podstawowe pojęcia teorii układów dynamicznych

### 1. Portret fazowy

Kluczem do opisu dynamiki układu jest zbudowana przez Poincarego koncepcja portretu fazowego układu dynamicznego:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x) \quad (10)$$

gdzie  $f \in C^\infty$  jest funkcją gładką,  $x \in R^n$ ,  $x = \{x^1, \dots, x^n\}$  jest wektorem o  $n$  składowych.

Pierwszym krokiem w konstrukcji portretu fazowego jest zbudowanie geometrycznego modelu zbioru wszystkich możliwych stanów układu, tj. przestrzeni stanów układu; albo zbioru  $x(t, x_0)$  stanów układu w dowolnej chwili  $t$  dla wszystkich warunków początkowych  $x_0$ .

Historia realnego układu może być reprezentowana jako pewna krzywa w przestrzeni stanów układu:

$$t \rightarrow x^i(t, x_0) \quad (11)$$

dla ustalonego  $x_0$ , zwana również potokiem fazowym.

Zgodnie z definicją (10) krzywa ta posiada określoną styczną (prędkość). Zbiór wszystkich krzywych fazowych dla wszystkich możliwych warunków początkowych nazywamy portretem fazowym układu dynamicznego. I odwrotnie wektor pola  $[f^1(x), \dots, f^n(x)]$  definiuje pewien układ dynamiczny na rozmaitości jako trajektorie, będące krzywymi całkowitymi tego wektora pola. Przestrzeń stanu (fazowa) w ogólności nie musi być przestrzeń kartezjańską, ale jest pewną rozmaitością różniczkową. Celem

jakościowej teorii układów dynamicznych jest zbadanie dynamiki (ruchu) z pominięciem jego cech ilościowych. Ważne są stany asymptotyczne układu, stabilność ruchu, etc., a nie jawne rozwiązania.

## 2. Atraktor

Trajektorie wychodzą ze zbioru granicznego  $\alpha$  i wchodzą do zbioru granicznego  $\Omega$ , oprócz separatrix, które podchodzą dowolnie blisko zbioru granicznego.

*Zbiór przyciągania zbioru granicznego* to zbiór wszystkich warunków początkowych, z których startujące trajektorie osiągają zbiór graniczny  $\Omega$ .

*Zbiór odpychania zbioru granicznego* to zbiór wszystkich warunków początkowych, z którego wychodzące trajektorie osiągają zbiór graniczny przy odwróconym kierunku czasu.

*Cykl graniczny* – niepunktowy zbiór graniczny  $\Omega$ , który posiada zbiór przyciągania i odpychania.

*Atraktor* – zbiór graniczny z otwartym zbiorem przyciągania.

W układach dynamicznych modelujących pewną sytuację eksperymentalną mam jedno-jedno odpowiedniość pomiędzy deterministycznym układem fizycznym i układem dynamicznym.

**Tabela 1.** Deterministyczny układ fizyczny, a jego model dynamiczny

Układ fizyczny	Układ dynamiczny
Stan równowagi	Zbiór graniczny
– w przeszłości	– zbiór $\alpha$
– w przyszłości	– zbiór $\Omega$
Ruch układu	Trajektoria w przestrzeni fazowej
Kierunek czasu	Strzałka wzdłuż trajektorii
Przeszłość układu przed osiągnięciem stanu równowagi	Zbiór przyciągania zbioru granicznego
Przyszłość układu po osiągnięciu położenia równowagi	Zbiór odpychania zbioru granicznego

Ponieważ prawdopodobieństwo znalezienia warunków początkowych dla detekcji zbioru granicznego jest proporcjonalne do objętości jego zbioru przyciągania – atraktory są eksperymentalnie wykrywalne. Zbiór graniczny jest prawdopodobny, jeśli objętość zbioru przyciągania zbioru granicznego (znormalizowana do objętości przestrzeni fazowej) jest liczbą różną od zera.

Otwarte zbiory posiadają dodatnią miarę, ale nie każdy zbiór o mierze dodatniej jest skończony. Pewne zbiory graniczne mogą być prawdopodobne, nie będąc atraktorami. Zbiory graniczne posiadające zerowej miary zbiór przyciągania nie są atraktorami. Nazywane są wyjątkowymi zbiorami granicznymi (albo nieprawdopodobnymi zbiorami granicznymi).

Basenem nazywamy zbiór przyciągania atraktora. W typowym przypadku (więcej niż jeden atraktor) portret fazowy może być podzielony na różne baseny, których brzegi – separatrysy, to punkty nienależące do basenu atraktora.

## Bibliografia

- Arnold W. I., (1975), *Równania różniczkowe zwyczajne*, Warszawa, PWN.
- Barrow J.D., Gaspar Y., (2001), “Bianchi VIII empty futures”, *Classical Quantum Gravity* 18, s. 1809–1822.
- Belinski V.A., Khalatnikov I.M., Lifshitz E.M., (1970), “Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology”, *Advances in Physics*, 19, s. 525–573.
- Berkovitz J., Frigg R., Kronz F., (2007), “The ergodic hierarchy, randomness and Hamiltonian chaos”, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 37, s. 661–691.
- Bogoyavlesky O.I., (1985), *Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics*, Moscow Nauka, 1980, tłum. ang. *Springer Series in Soviet Math*, Springer.
- Cornish N.J., Levin J.J., (1996), “The mixmaster universe is chaotic”, *Physical Review Letters*, 78, s. 998–1001.
- Cusman R., Śniatycki J., (1995), “Local Integrability of the mixmaster models”, *Reports on Mathematical Physics*, 36.
- Gaspar Y., (2004), “Time asymmetry and chaos in general relativity”, *General Relativity and Gravitation*, 36(9), s. 2085–2094.

- Gaspar Y., Acquaviva C., (2012), "Gravity and complexity", *European Physical Journal*, 127, s. 65.
- Landau L.D., Lifszyc E.M., (1971), *Teoria pola*, Warszawa, PWN.
- Lighthill J., (1986), "The recently recognised failure of predictability in Newtonian Dynamics", *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 407, s. 35–50.
- Maciejewski A.J., Strelcyn J.-M., Szydłowski M., (2001), "Non-integrability of B VIII Hamiltonian System", *Journal of Mathematical Physics*, 42, s. 1728–1743.
- Moore C., (1990), "Unpredictability and undecidability in dynamical systems", *Physical Review Letters*, 94, s. 2354–2357.
- Shuster H.G., Just W., (2005), *Deterministic Chaos: An Introduction*, Weinheim, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.
- Stauffer D., Stanley H.E., (2000), *Od Newtona do Mandelbrota*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Strelcyn J.-M., (1991), "The coexistence problem for conservative dynamical systems: A review", *Colloquium Mathematicum*, 62, s. 331–345.
- Szydłowski M., (1997), „Czy Wszechświat jest prostym układem dynamicznym o złożonym zachowaniu?”, *Roczniki Filozoficzne KUL*, 45(3), s. 49–73.
- Tempczyk M., (1998), *Teoria chaosu i filozofia*, Warszawa, CiS.
- Tempczyk M., (2002), *Teoria chaosu dla odważnych*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Weingartner P., (1996), "Under what transformation are laws invariant", [w:] *Law and Prediction in the Light of Chaos Research*, eds. P. Weingartner, G. Schurz, Berlin, Springer, s. 47–88.
- Werndl Ch., (2009), "What are the new implications of chaos for unpredictability", *British Journal of Philosophy of Science*, 60, s. 195–220.
- Wiggins S., (2013), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, New York, Springer-Verlag.

Marek Szydłowski  
Centrum Badań Układów Złożonych im. Marka Kaca,  
Uniwersytet Jagielloński,  
ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków  
e-mail: marek.szydowski@uj.edu.pl

Paweł Tambor  
Wydział Teologii, Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II,  
al. Raławickie 14, 20-950 Lublin.  
e-mail: pawel.tambor@gmail.com